22/05/2018

- Ένας $n \times n$ πίνακας-συνάρτηση ορισμένος σε ένα διάστημα I, του οποίου οι στήλες είναι λύσεις του ομογενούς συστήματος (Σ_0) λέγεται ότι είναι ένας πίνακας λύσεων του (Σ_0): $u' = Au$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω Y ένας πίνακας-συνάρτηση ορισμένος σε ένα διάστημα I. Τότε ο Y είναι ένας πίνακας λύσεων του (Σ_0) αν και μόνο αν έχει παράγωγο στο I και $Y' = A \cdot Y$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: $(\Rightarrow)$ Έστω ότι

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix}$$

Θεωρούμε το διάνυσμα

$$y^j = \begin{pmatrix} y_{1j} \\ y_{2j} \\ \vdots \\ y_{nj} \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Ο Y θα έχει παράγωγο στο I αν και μόνο αν οι n-διάστατες διανυσματικές συναρτήσεις y^j ($j = 1, 2, \ldots, n$) είναι παραγωγίσιμες στο I. Εάν λοιπόν Y είναι πίνακας λύσεων έπεται y^j $j = 1, 2, \ldots, n$ είναι λύσεις του (Σ_0) δηλαδή

$$(y^j)' = Ay^j, \quad \text{όπου} \quad y^j = \begin{pmatrix} y_{1j} \\ y_{2j} \\ \vdots \\ y_{nj} \end{pmatrix}$$

ή

$$\begin{pmatrix} y_{1j}' \\ y_{2j}' \\ \vdots \\ y_{nj}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1j} \\ y_{2j} \\ \vdots \\ y_{nj} \end{pmatrix}$$

NO.

Date

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_{1j}' \\ y_{2j}' \\ \vdots \\ y_{nj}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k} y_{kj} \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k} y_{kj} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{nk} y_{kj} \end{pmatrix}$$

οπότε $y_{ij}' = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot y_{kj}$, $i,j = 1,2,\dots,n$

Συνεπώς

$$\boxed{Y' = A \cdot Y}$$

($\Leftarrow$) Εάν Y έχει παράγωγο και $Y' = AY$ έπεται ότι

$$y_{ij}' = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} y_{kj}$$

άρα $(y^j)' = A \cdot y^j$

Άρα, οι στήλες του πίνακα Y είναι λύσεις του (E_0)

Άρα Y είναι πίνακας λύσεων.

ΘΕΩΡΗΜΑ:

Εάν Y είναι ένας πίνακας λύσεων του (E_0) και c είναι ένα n-διάστατο διάνυσμα τότε $Y \cdot c$ είναι μια λύση του (E_0)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Έστω Y πίνακας λύσεων

$$Y' = A \cdot Y$$

Επίσης $Yc = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} y_{1k} \cdot c_k \\ \sum_{k=1}^{n} y_{2k} \cdot c_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} y_{nk} \cdot c_k \end{pmatrix}$$

Οπότε $(Y\cdot c)' = Y'\cdot c = A\cdot Y'\cdot c = A(Y\cdot c)$

$\uparrow$
πίνακας
λύσεων

Οπότε

$Y = A\,c$ είναι λύση της (E_0)

ΟΡΙΣΜΟΣ:

Ένας πίνακας λύσεων του (E_0) του οποίου οι στήλες είναι γραμμικά ανεξάρτητες (συναρτήσεις) λέμε ότι είναι ένας βασικός πίνακας λύσεων του (E_0)

ΘΕΩΡΗΜΑ: Εάν y_k $(k=1,2,\dots,n)$ είναι λύσεις του (E_0) και $t_0 \in I$. Τότε y_k $(k=1,2,\dots,n)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες αν και μόνο αν τα n-διάστατα διανύσματα $y_k(t_0)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: $(\Rightarrow)$ Έστω $y_1, y_2, \dots, y_n$ είναι γραμμικά εξαρτημένες τότε θα υπάρχουν $c_1, c_2, \dots, c_n$ σταθερές όχι όλες μηδέν τέτοιες ώστε

$$c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n = 0$$

$$c_1y_1(t) + c_2y_2(t) + \dots + c_ny_n(t) = 0 \quad \forall t \in I$$

Για $t = t_0$:

$$c_1y_1(t_0) + c_2y_2(t_0) + \dots + c_ny_n(t_0) = 0$$

Άρα τα $y_1(t_0), y_2(t_0), \dots, y_n(t_0)$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

$(\Leftarrow)$ Έστω ότι $y_k(t_0)$ $k=1,2,\dots,n$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. Τότε $\exists\, (c_1, c_2, \dots, c_n) \neq (0,0,\dots,0)$ τέτοια ώστε

$$c_1y_1(t_0) + \dots + c_ny_n(t_0) = 0$$

αλλά επειδή $y_1, y_2, \dots, y_n$ είναι λύσεις του (E_0) έπεται ότι και η $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n$ είναι επίσης λύση της ομογενούς.
Επίσης, $y(t_0) = c_1y_1(t_0) + c_2y_2(t_0) + \dots + c_ny_n(t_0) = 0$.
Λόγω του ότι υπάρχει μοναδική λύση του (E_0) η οποία ικανοποιεί μια δοσμένη αρχική συνθήκη έπεται ότι

$$y = 0 \Rightarrow c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n = 0.$$

NO

Date

Άρα, $y_1, y_2, \dots, y_n$ γραμμικά εξαρτημένες.

► Έστω

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_{11}(t) & y_{12}(t) \\ y_{21}(t) & y_{22}(t) \end{pmatrix}$$

$$|y(t)| = y_{11}(t)\, y_{22}(t) - y_{21}(t) \cdot y_{12}(t)$$

$$\frac{d}{dt}|y(t)| = y'_{11}(t) \cdot y_{22}(t) + y_{11}(t) \cdot y'_{22}(t) - y'_{21}(t) \cdot y_{12}(t) - y_{21}(t)\, y'_{12}(t) =$$

$$= \begin{vmatrix} y'_{11}(t) & y'_{12}(t) \\ y_{21}(t) & y_{22}(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_{11}(t) & y_{12}(t) \\ y'_{21}(t) & y'_{22}(t) \end{vmatrix}$$

Επομένως αποδεικνύεται για την πίνακα-συνάρτηση

$$\frac{d}{dt}|y(t)| = \begin{vmatrix} y'_{11}(t) & y'_{12}(t) & \cdots & y'_{1n}(t) \\ y_{21}(t) & y_{22}(t) & \cdots & y_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{n1}(t) & y_{n2}(t) & \cdots & y_{nn}(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_{11}(t) & y_{12}(t) & \cdots & y_{1n}(t) \\ y'_{21}(t) & y'_{22}(t) & \cdots & y'_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{n1}(t) & y_{n2}(t) & \cdots & y_{nn}(t) \end{vmatrix} +$$

$$+ \cdots + \begin{vmatrix} y_{11}(t) & y_{12}(t) & \cdots & y_{1n}(t) \\ y_{21}(t) & y_{22}(t) & \cdots & y_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y'_{n1}(t) & y'_{n2}(t) & \cdots & y'_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ: (Τύπος Jacobi)

Έστω Φ ένας πίνακας του ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος (E_0) και $t_0 \in I$. Τότε ισχύει

$$|\Phi(t)| = |\Phi(t_0)| \cdot \exp\left[\int_{t_0}^{t} tr(A(s))\, ds\right], \text{ για } t \in I$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Έστω $\Phi(t) = \begin{pmatrix} u_{11}(t) & u_{12}(t) & \cdots & u_{1n}(t) \\ u_{21}(t) & u_{22}(t) & \cdots & u_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{n1}(t) & u_{n2}(t) & \cdots & u_{nn}(t) \end{pmatrix}$

Επειδή Φ είναι πίνακας λύσεων του (E_0)

$$\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$$

οπότε $u'_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} u_{kj}$

Οπότε

$$\frac{d}{dt}|\Phi(t)| = \frac{d}{dt}\begin{vmatrix} u_{11}(t) & u_{12}(t) & \cdots & u_{1n}(t) \\ u_{21}(t) & u_{22}(t) & \cdots & u_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{n1}(t) & u_{n2}(t) & \cdots & u_{nn}(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u'_{11}(t) & u'_{12}(t) & \cdots & u'_{1n}(t) \\ u_{21}(t) & u_{22}(t) & \cdots & u_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{n1}(t) & u_{n2}(t) & \cdots & u_{nn}(t) \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} u_{11}(t) & u_{12}(t) & \cdots & u_{1n}(t) \\ u'_{21}(t) & u'_{22}(t) & \cdots & u'_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{n1}(t) & u_{n2}(t) & \cdots & u_{nn}(t) \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} u_{11}(t) & u_{12}(t) & \cdots & u_{1n}(t) \\ u_{21}(t) & u_{22}(t) & \cdots & u_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u'_{n1}(t) & u'_{n2}(t) & \cdots & u'_{nn}(t) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}u_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}u_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}\cdot u_{kn} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k}u_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}u_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}u_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{nn} \end{vmatrix} + \cdots +$$

NO.

Date

$$+\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{nk} u_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{nk} u_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{nk} u_{kn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{1k} \begin{vmatrix} u_{k1} & u_{k2} & \cdots & u_{kn} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \sum_{k=1}^{n} a_{nk} \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{k1} & u_{k2} & \cdots & u_{kn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}|\Phi(t)| + a_{22}|\Phi(t)| + \cdots + a_{nn}|\Phi(t)| = (tr\, A(t)) \cdot |\Phi(t)|$$

οπότε, $\dfrac{d}{dt}|\Phi(t)| = tr\, A(t) \cdot |\Phi(t)|$

Έστω $t_0 \in I$ και $\dfrac{d}{dt}|\Phi(t)| \cdot \exp\left[-\int_{t_0}^{t} tr\, A(s)\,ds\right] - tr\, A(t)|\Phi(t)| \cdot \exp\left[-\int_{t_0}^{t} tr\, A(s)\,ds\right] = 0$

$$\frac{d}{dt}\left[\exp\left[-\int_{t_0}^{t} tr\, A(s)\,ds\right] \cdot |\Phi(t)|\right) = 0$$

Άρα, $|\Phi(t)| \cdot \exp\left[-\int_{t_0}^{t} tr\, A(s)\,ds\right] = c$

οπότε $|\Phi(t)| = c \cdot \exp\left[\int_{t_0}^{t} tr\, A(s)\,ds\right]$, $\forall t \in I$ (1)

για $t = t_0$

$|\Phi(t_0)| = c$

Άρα από (1) λόγω (2)

$$|\Phi(t)| = |\Phi(t_0)| \exp\left[\int_{t_0}^{t} tr\, A(s)\,ds\right]$$